

1 Lokaler Abbruchfehler

Es sei

$$x_i = x(T_i) \quad \text{für } i \leq k, \quad (1)$$

d. h. bis zum aktuellem Rechenschritt k sind keine Fehler entstanden. Die Näherung für $x(T_{k+1})$ berechnet sich nach

$$x_{k+1} = x_k + \Delta_k. \quad (2)$$

Es ist

$$R_{k+1} := |x(T_{k+1}) - x_{k+1}| \sim T^p \quad (3)$$

der lokale Abbruchfehler. Der lokale Abbruchfehler hat folgende Eigenschaften

- Eine obere Grenze kann angegeben werden (Lagrangisches Restglied). Diese ist proportional zu T^p , wobei T die Schrittweite und p die Genauigkeitsordnung ist.
- Eine Näherung kann durch parallel durchgeführte Simulationen mit halber Schrittweite bzw. Verfahren mit verschiedener Genauigkeitsordnung erhalten werden.
- Die Bedingung (1) für die das Restglied definiert ist, ist in der Regel nicht erfüllt.

2 Globaler Abbruchfehler

Es sei

$$x_0 = x(T_0). \quad (4)$$

Dann ist

$$\delta_{k+1} = C \cdot \delta_k + R_{k+1} \quad (5)$$

der globale Abbruchfehler. Dieser beinhaltet alle vom Simulationsstart bis zum Wert x_{k+1} aufgelaufene Fehler.

Es kann gezeigt werden, dass

$$C = I + \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_i} \quad (6)$$

gilt. Weiterhin besagt die Theorie der Differenzengleichungen, dass die Fehlerdifferenzengleichung (5) stabil ist, d. h. für beschränkte R_i auch beschränkte δ_i liefert, wenn die Eigenwerte von C innerhalb des Einheitskreises liegen.

2.1 Beispiele

2.1.1 PT₁-System mit Euler-Vorwärts Verfahren

Ein PT₁-System wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = a \cdot x \quad (7)$$

beschrieben. Mit $x = v$ und $a = -d/m$ wird z. B. ein Körper beschrieben, der sich mit der Geschwindigkeit v bewegt und durch eine geschwindigkeitsproportionale Reibung gebremst wird. Dann ist

$$\Delta_k = T a \cdot x_k \quad (8)$$

und

$$\frac{\partial \Delta_k}{\partial x} = T a. \quad (9)$$

Damit ist

$$C = 1 + T a \quad (10)$$

Die Eigenwerte eines Skalars ist der Skalar selber, d. h. es muß gelten

$$-1 < 1 + T a < 1 \Leftrightarrow -2 < T a < 0 \quad (11)$$

Da $T > 0$ ist (Schrittweite!) müssen die Bedingungen

$$a < 0 \quad \text{und} \quad (12)$$

$$0 < T < -2\frac{1}{a} \quad (13)$$

Erfüllt sein. Bezogen auf den abgebremsten Körper muss also

$$0 < T < 2\frac{m}{d} \quad (14)$$

gelten, d. h. wenn die Schrittweite T bezogen auf das zu simulierende System zu groß wird, wird der globale Fehler nicht konvergieren; die Simulation wird instabil.

2.1.2 PT₁-System mit implizitem Eulerverfahren

Es wird abermal obiges PT₁-System betrachtet. Als Integrationsverfahren wird diesmal das implizite Eulerverfahren verwendet, also

$$x_{k+1} = x_k + T a \cdot x_{k+1} \quad (15)$$

Um das Nährunksinkrement bzw. C zu erkennen muß x_{k+1} auf die linke Seite

$$x_{k+1} = \frac{1}{1 - T a} x_k \quad (16)$$

$$= x_k + \frac{1 - (1 - T a)}{1 - T a} x_k \quad (17)$$

$$= x_k + \frac{T a}{1 - T a} x_k \quad (18)$$

Es ist dann

$$C = 1 + \frac{T a}{1 - T a} \quad (19)$$

Es muß nun wieder gelten

$$-1 < C < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \frac{T a}{1 - T a} < 1 \quad (20)$$

Fall 1: $1 - T a > 0 \Leftrightarrow 1 > T a$

$$-(1 - T a) < 1 < 1 - T a \quad (21)$$

$$0 < 2 - T a < 2 - 2T a \quad (22)$$

Die linke Ungleichung ist erfüllt durch

$$0 < 1 - T a < 2 - T a \text{ (Fallunterscheidung)} \quad (23)$$

Andererseits muß gelten

$$2 - T a < 2 - 2T a \quad (24)$$

$$-T a < -2T a \quad (25)$$

$$T a > 2T a \quad (26)$$

$\Downarrow$

$$0 > T a \quad \text{welches der Fallunterscheidung nicht widerspricht} \quad (27)$$

Fall 2: $1 - T a < 0$

$$-(1 - T a) > 1 > 1 - T a \quad (28)$$

Die rechte Bedingung ist durch die Fallunterscheidung erfüllt. Damit muss nur

$$-(1 - T a) > 1 \quad (29)$$

untersucht werden. Aus dieser folgt offensichtlich

$$T a > 2 \quad (30)$$

Zusammen:

$$T a < 0 \text{ oder } T a > 2 \quad (31)$$

2.1.3 Zusammenfassung der beiden Beispiele

Es war

$$\dot{x} = a \cdot x \quad , \quad (32)$$

unser Beispielsystem. Der globale Fehler konvergiert beim expliziten Eulerverfahren nur für Systeme mit $a < 0$ (stabile Systeme). Zudem muss die Schrittweite die Bedingung

$$0 < T < -2\frac{1}{a} \quad (33)$$

erfüllt sein. Das implizite Verfahren stellt keine Anforderungen an a und konvergiert wenn

$$T a < 0 \text{ oder } T a > 2 \quad (34)$$

erfüllt ist. Allerdings ist eine einfache Darstellung des impliziten Verfahrens wie in Gleichung (18) bei nichtlinearen Systemen in der Regel nicht möglich.